Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis

Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:

Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς

Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας

2020 - 2021


Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

7ο Διαγώνισμα

12-4-2021

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ’ ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0,στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

μονάδες 7

Α2. Πότε μία συνάρτηση λέγεται γνησίως αύξουσα σ’ ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ’ αυτό, τότε διατηρεί πρόσημο στο Δ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

Α4. Σε μαθητή δόθηκε η παρακάτω πρόταση Σωστού Λάθους με αιτιολόγηση:

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = g(\alpha)$ και $f(\beta) = g(\beta)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε στα σημεία $A(x_0, f(x_0))$ και $B(x_0, g(x_0))$ οι εφαπτομένες να είναι παράλληλες .

Με πρόχειρη σκέψη ο μαθητής απάντησε ψευδής και το αιτιολογεί ως εξής:

Αν εφαρμόσουμε το ΘΜΤ για την f και την g στο $[\alpha, \beta]$ υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta): f'(x_0)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ και

$x_1 \in (\alpha,\beta): g'(x_1)=\dfrac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha}$ είναι βέβαια $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\dfrac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha}$ όμως αυτό δεν εξασφαλίζει ότι τα x_0, x_1 είναι ίσα οπότε δεν είναι βέβαιο ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε στα σημεία $A(x_0, f(x_0))$ και $B(x_0, g(x_0))$ οι εφαπτομένες να είναι παράλληλες .

Να απαντήσετε αν ο μαθητής έχει δίκιο . Σε κάθε περίπτωση να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

μονάδες 4

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν η ευθεία $y = \beta$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to\beta} f(x)=+\infty$.

β) Αν $f''(x)=x^2$, τότε η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ τότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την f.

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x-\sigma\varphi x, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της και να βρείτε (αν υπάρχουν) τα ακρότατα της.

μονάδες 4

Β2. Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x)=2021$.

μονάδες 7

Β3. Να εξετάσετε την f ως προς την κυρτότητα.

μονάδες 7

Β4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f και να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f.

μονάδες 3+4

Θέμα Γ

Σε μια καλλιέργεια βακτηριδίων παρατηρήσαμε ότι αρχικά ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού τους $N'(t)$ ήταν σταθερός και ίσος με 1 (εκατομμύρια βακτηρίδια ανά ώρα). Η καλλιέργεια αναπτύσσεται ομοιόμορφα πάνω σε μια γυάλινη πλάκα σχήματος κυκλικού δίσκου ακτίνας R=64mm ξεκινώντας από το κέντρο.

Μετά από χρόνο $t_1=1$ ώρες εκτιμήσαμε ότι ο αριθμός των βακτηριδίων ήταν $N(1)=10$ (εκατομμύρια) και μετρήσαμε ότι η καλλιέργεια κατελάμβανε μια κυκλική επιφάνεια που είχε ακτίνα R_1=8mm με κέντρο το κέντρο της γυάλινης πλάκας.

Γ1. Να βρείτε τον αρχικό αριθμό βακτηριδίων καθώς και την επιφάνεια Ε(1) που καταλαμβάνουν αυτά τη χρονική στιγμή $t_1=1$.

μονάδες 4

Στην συνέχεια παρατηρήθηκε ότι ο αριθμός αύξησης έπαψε να είναι σταθερός και προέκυψε ότι το πλήθος των βακτηρίων ακολουθεί την εκθετική μεταβολή $N(t)=e^{kt}\cdot e^{c}$ με k, c σταθερές με $t\geq 1$.

Εκτιμήθηκε ότι ο πληθυσμός τετραπλασιάστηκε μια ώρα μετά την t_1. Δεχόμαστε ακόμη ότι από τη χρονική στιγμή t_1 και μετά η επιφάνεια που καταλαμβάνει η καλλιέργεια είναι ανάλογη του αριθμού των βακτηριδίων.

Γ2. Να αποδείξετε ότι κ=ln4, $e^{c}=\dfrac{5}{2}$ και $N(t)=10\cdot 4^{t-1}$.

μονάδες 6

Γ3. Να γράψετε τον τύπο μιας συνάρτησης $N(t)$ η οποία θα δίνει τον πληθυσμό των βακτηριδίων σε κάθε χρονική στιγμή μέχρι και τη χρονική στιγμή t=4.

μονάδες 2

Γ4. Να βρείτε το τύπο που δίνει το εμβαδόν της κυκλικής επιφάνειας που καταλαμβάνουν τα βακτηρίδια για $1\leq t\leq 4$.

μονάδες 5

Γ5. Να υπολογίσετε τον τελικό αριθμό βακτηριδίων και τον απαιτούμενο χρόνο όταν η καλλιέργεια έχει εξαπλωθεί σε όλη την γυάλινη πλάκα.

μονάδες 4

Γ6. Την χρονική στιγμή t=4 αρχίζει να ενεργεί η κολπικίνη, μια ουσία η οποία σταματάει την αύξηση των βακτηριδίων και τα εξολοθρεύει μειώνοντας το πλήθος τους με ρυθμό $N'(t)=-12{,}8(t-4)$, $t\geq 4$. Να βρείτε από πια χρονική στιγμή και μετά δεν θα υπάρχουν βακτηρίδια .

μονάδες 4

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\dfrac{|x-2|}{\sqrt{x^2+1}}$.

Δ1. Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

μονάδες 6

Δ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και στη συνέχεια να δείξετε ότι τα τοπικά ακρότατα της f είναι ακρότατα της f.

μονάδες 4

Δ3. Να βρεθεί η ευθεία , η οποία ανήκει στις ευθείες : $Ax+By+2B-A=0, A,B\in\mathbb{R}^*, A\neq 2B$ και απέχει την μέγιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων .

μονάδες 7

Δ4. Να δείξετε ότι :

α) η f είναι κοίλη για $x\geq 2$

β) υπάρχει μία ακριβώς εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f , παράλληλη στην ευθεία $y=\dfrac{1}{5}x+2021$, σε σημείο της με τετμημένη μεγαλύτερη ή ίση του 2 .

μονάδες 3+5

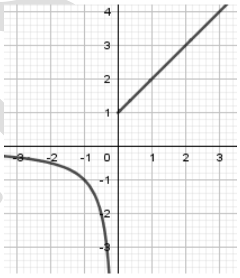
Καλή Τύχη!

Θέμα Α

Α1. Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$. Έτσι έχουμε $f(x) \le f(x_0)$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0]$. (1)
Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε: $f(x) \le f(x_0)$, για κάθε $x \in [x_0, \beta)$. (2)
Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει: $f(x) \le f(x_0)$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

Α2. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$

Α3. α) Ψευδής



β) Η f δεν είναι υποχρεωτικό να διατηρεί πρόσημο στο Δ γιατί δεν είναι συνεχής σ' αυτό.

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x < 0 \\ x+1, & x \ge 0 \end{cases}$. Είναι $f(x) \ne 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όμως δεν διατηρεί το πρόσημό της.

Α4. Αν δεν μπορούμε να αποδείξουμε μια πρόταση με τη βοήθεια κάποιου θεωρήματος αυτό δεν σημαίνει ότι η πρόταση δεν ισχύει. Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ τότε για αυτήν ισχύει το ΘRolle άρα θα υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta) : h'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0) = 0$ οπότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε στα σημεία $A(x_0, f(x_0))$ και $B(x_0, g(x_0))$ οι εφαπτομένες να είναι παράλληλες.

Α5. α) Λ β) Σ γ) Σ

Θέμα Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ με παράγωγο $f'(x) = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + \dfrac{1}{\eta\mu^2 x} > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right), \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ άρα δεν έχει ακρότατα.

Β2. Έστω $A_1 = \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ και $A_2 = \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$.
Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα αυτά οπότε:

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \to 0^+} f(x), \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) \right) = (0 - \infty, +\infty - 0) = (-\infty, +\infty),$$

$$f(A_2) = \left(\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x), \lim_{x \to \pi^-} f(x) \right) = (-\infty - 0, 0 + \infty) = (-\infty, +\infty).$$

Το 2021 ανήκει στα $f(A_1), f(A_2)$ οπότε υπάρχουν $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2$ τέτοια ώστε
$f(x_1) = 2021, f(x_2) = 2021$
Τα x_1, x_2 μοναδικά ,λόγω της μονοτονίας στα διαστήματα A_1, A_2 ,άρα η εξίσωση $f(x) = 2021$

έχει δύο ακριβώς ρίζες.

Β3. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ με δεύτερη παράγωγο

$$f''(x)=\frac{2\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^3 x}-\frac{2\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^3 x}=\frac{2\left(\eta\mu^4 x-\sigma\upsilon\nu^4 x\right)}{\sigma\upsilon\nu^3 x\cdot\eta\mu^3 x}=\frac{2\left(\eta\mu^2 x-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)\left(\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x\right)}{\sigma\upsilon\nu^3 x\cdot\eta\mu^3 x}=\frac{2\left(\eta\mu^2 x-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)}{\sigma\upsilon\nu^3 x\cdot\eta\mu^3 x}.$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{2\left(\eta\mu^2 x-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)}{\sigma\upsilon\nu^3 x\cdot\eta\mu^3 x}=0\Leftrightarrow\eta\mu^2 x-\sigma\upsilon\nu^2 x=0\Leftrightarrow\eta\mu^2 x=\sigma\upsilon\nu^2 x\Leftrightarrow$$

$$\left(\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=1\overset{x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)}{\Leftrightarrow}x=\frac{\pi}{4}\right)\acute{\eta}\left(\eta\mu x=-\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=-1\overset{x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)}{\Leftrightarrow}x=\frac{3\pi}{4}\right)$$

. Έχουμε

$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\left(\eta\mu^2\frac{\pi}{6}-\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{6}\right)}{\sigma\upsilon\nu^3\frac{\pi}{6}\cdot\eta\mu^3\frac{\pi}{6}}=\frac{2\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{8}}=-\frac{64}{3\sqrt{3}}<0 \text{ οπότε } f''(x)<0 \text{ στο } \left(0,\frac{\pi}{4}\right),$$

$$f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\left(\eta\mu^2\frac{\pi}{3}-\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{3}\right)}{\sigma\upsilon\nu^3\frac{\pi}{3}\cdot\eta\mu^3\frac{\pi}{3}}=\frac{2\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}=\frac{64}{3\sqrt{3}}>0 \text{ οπότε } f''(x)>0 \text{ στο } \left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right),$$

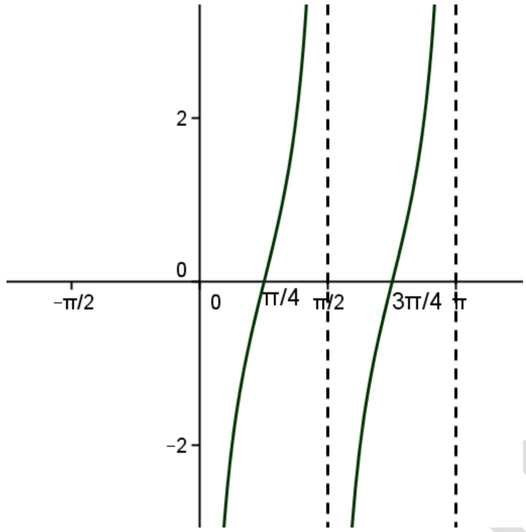
$$f''\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{2\left(\eta\mu^2\frac{2\pi}{3}-\sigma\upsilon\nu^2\frac{2\pi}{3}\right)}{\sigma\upsilon\nu^3\frac{2\pi}{3}\cdot\eta\mu^3\frac{2\pi}{3}}=\frac{2\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)}{-\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}=-\frac{64}{3\sqrt{3}}<0 \text{ οπότε } f''(x)<0 \text{ στο } \left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right),$$

$$f''\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{2\left(\eta\mu^2\frac{5\pi}{6}-\sigma\upsilon\nu^2\frac{5\pi}{6}\right)}{\sigma\upsilon\nu^3\frac{5\pi}{6}\cdot\eta\mu^3\frac{5\pi}{6}}=\frac{2\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)}{-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{8}}=\frac{64}{3\sqrt{3}}>0 \text{ οπότε } f''(x)>0 \text{ στο } \left(\frac{3\pi}{4},\pi\right).$$

Η f είναι συνεχής στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ άρα είναι κοίλη στα διαστήματα $\left(0,\frac{\pi}{4}\right],\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$,κυρτή στα διαστήματα $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right),\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$ και έχει σημεία καμπής τα σημεία $\left(\frac{\pi}{4},f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right),\left(\frac{3\pi}{4},f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ δηλαδή τα σημεία $\left(\frac{\pi}{4},0\right),\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$.

Β4. Από Β2 ερώτημα η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες $x=0, x=\frac{\pi}{2}, x=\pi$.

Στο πεδίο ορισμού της δεν υπάρχουν περιοχές του $\pm\infty$ άρα δεν έχει οριζόντιες και πλάγιες ασύμπτωτες.



Θέμα Γ

Γ1. Είναι $N'(t)=1$ οπότε $N(t)=t+c_1$.
Για t=1 το N(1)=10 $\Leftrightarrow 1+c_1=10 \Leftrightarrow c_1=9$ άρα $N(t)=t+9$.
Τότε $N(0)=9$ εκατ. βακτήρια.
Αν E(t) το εμβαδόν της επιφάνειας που καταλαμβάνει τότε E(1)= $\pi R_1^2=64\pi$ mm^2

Γ2. Θα είναι N(1)=10 $\Leftrightarrow e^k.e^c=10 \Leftrightarrow e^c=\frac{10}{e^k}$ οπότε $N(t)=e^{kt}\cdot\frac{10}{e^k}=10e^{k(t-1)}$.

Όμως N(2)=4N(1) $\Leftrightarrow 10e^k=4\cdot 10 \Leftrightarrow e^k=4 \Leftrightarrow \kappa=\ln 4$ και $e^c=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$ οπότε $N(t)=10\cdot 4^{t-1}$

Γ3. Άρα $N(t)=\begin{cases} t+9, & 0\le t\le 1 \\ 10\cdot 4^{t-1}, & 1<t\le 4\end{cases}$

Γ4. Για $1\le t\le 4$ είναι $E(t)=\lambda N(t)$ με $\lambda\in\mathbb{R}$ τότε για t=1:
$E(1)=\lambda N(1)\Leftrightarrow 64\pi=\lambda 10\Leftrightarrow \lambda=6,4\pi$ οπότε $E(t)=6,4\pi N(t)$

Γ5. Αν t_o ο χρόνος μέχρι να καλύψει όλη την επιφάνεια τότε
$E(t_0)=6,4\pi N(t_0)\Leftrightarrow \pi\cdot 64^2=6,4\pi N(t_0)\Leftrightarrow N(t_0)=640$ εκατ. βακτ.
Τότε N(t_o)=$10\cdot 4^{t-1}$=640 $\Leftrightarrow$ $4^{t-1}=64 \Leftrightarrow 4^{t-1}=4^3 \Leftrightarrow t-1=3\Leftrightarrow t=4$.
Οπότε t=4 ώρες.

Γ6. $N'(t)=-12,8(t-4) \Leftrightarrow N(t)=-6,4(t-4)^2+c_2$ για t=4 το c_2=640 οπότε $N(t)=-6,4(t-4)^2+640$
και $N(t)=0 \Leftrightarrow t=14$.
Συνεπώς 14 ώρες μετά από την επίδραση της κολπικίνης θα έχουν εξοντωθεί όλα τα βακτηρίδια.

Θέμα Δ

Δ1. Η συνάρτηση $|x-2|$ είναι συνεχής ως απόλυτη τιμή συνεχούς συνάρτησης και επειδή η $\sqrt{x^2+1}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, η f είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Έχουμε : $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}, x\geq 2\\ \dfrac{-x+2}{\sqrt{x^2+1}}, x<2\end{cases}$.

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(-\infty,2\right)$ με παράγωγο:

$$f'\left(x\right)=\frac{-\sqrt{x^2+1}+\left(x-2\right)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{\cancel{-x^2}-1+\cancel{x^2}-2x}{\sqrt{x^2+1}^3}\Leftrightarrow f'\left(x\right)=\frac{-2x-1}{\sqrt{x^2+1}^3}.$$

$$f'\left(x\right)\geq 0\Leftrightarrow\frac{-2x-1}{\underbrace{\sqrt{x^2+1}^3}_{>0}}\geq 0\Leftrightarrow -2x-1\geq 0\Leftrightarrow x\leq-\frac{1}{2}.$$

Η f είναι συνεχής στο $\left(-\infty,2\right]$ άρα είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$, γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{1}{2},2\right]$ οπότε παρουσιάζει μέγιστο στο $-\frac{1}{2}$,το $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\dfrac{\frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}}=\dfrac{\frac{5}{\cancel{2}}}{\frac{\sqrt{5}}{\cancel{2}}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\dfrac{5\sqrt{5}}{\sqrt{5}^2}=\dfrac{\cancel{5}\sqrt{5}}{\cancel{5}}=\sqrt{5}$.

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(2,+\infty\right)$ με παράγωγο:

$$f'\left(x\right)=\frac{\sqrt{x^2+1}-\left(x-2\right)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}+2x}{\sqrt{x^2+1}^3}\Leftrightarrow f'\left(x\right)=\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}^3}>0 \text{ για } x>2 \text{ άρα}$$

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[2,+\infty\right)$.

Επομένως η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο 2 το $f\left(2\right)=0$.

Δ2.Έστω $A_1=\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right), A_2=\left[-\frac{1}{2},2\right)$ και $A_3=\left[2,+\infty\right)$.

Λόγω της μονοτονίας στα αντίστοιχα διαστήματα έχουμε:

$f\left(A_1\right)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right),\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^-}f\left(x\right)\right)=\left(1,\sqrt{5}\right), f\left(A_2\right)=\left(\lim\limits_{x\to 2}f\left(x\right),f\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=\left(0,\sqrt{5}\right]$ και

$f\left(A_1\right)=\left[f\left(2\right),\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)\right)=\left[0,1\right)$.

Άρα έχει σύνολο τιμών το $f\left(A\right)=f\left(A_1\right)\cup f\left(A_2\right)\cup f\left(A_3\right)=\left[0,\sqrt{5}\right]$.

$$(\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1,\ \lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+2}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1+\frac{2}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1)$$

από το σύνολο τιμών βλέπουμε ότι το $f\left(2\right)=0, f\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{5}$ είναι αντίστοιχα ελάχιστο και μέγιστο της συνάρτησης.

Δ3. Η απόσταση d της αρχής των αξόνων από τις ευθείες δίνεται από τον τύπο :

$$d=\frac{\left|2B-A\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{\left|2-\frac{A}{B}\right|}{\sqrt{\left(\frac{A}{B}\right)^2+1}}=\frac{\left|\frac{A}{B}-2\right|}{\sqrt{\left(\frac{A}{B}\right)^2+1}}$$

Αν θέσουμε $\frac{A}{B}=x$, προκύπτει η συνάρτηση f , η οποία έχει μέγιστο το $\sqrt{5}$ για

$x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{A}{B}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow B=-2A$,όπως φαίνεται από το Δ2,οπότε η ζητούμε ευθεία έχει τύπο:

$Ax-2Ay-5A=0\Leftrightarrow x-2y-5=0$.

Δ4.α) Στο $[2,+\infty)$,η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με δεύτερη παράγωγο

$$f''(x)=\frac{2\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}-(2x+1)\cdot 3x\cancel{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}}{\left(x^2+1\right)^{\frac{5}{2}}}=\frac{2x^2+2-6x^2-3x}{\left(x^2+1\right)^{\frac{5}{2}}}=\frac{-4x^2-3x+2}{\left(x^2+1\right)^{\frac{5}{2}}}.$$

Για $x>2$ έχουμε : $\begin{cases}x^2>4\\-3x<-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4x^2<-16\\-3x+2<-4\end{cases}\Rightarrow -4x^2-3x+2<-20<0$ οπότε

$f''(x)<0$ στο $[2,+\infty)$ άρα η f είναι κοίλη στο διάστημα αυτό.

β) Η f είναι κοίλη στο $[2,+\infty)$ άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα σ' αυτό το διάστημα.

Επομένως έχει σύνολο τιμών το $f'([2,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x),f'(2)\right]=\left(0,\frac{\sqrt{5}}{5}\right]$ αφού

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}^{\,3}}=\lim_{x\to+\infty}\cancel{\frac{1}{x^3}}^{\,0}\;\frac{1}{\sqrt{1+\cancel{\frac{1}{x^2}}^{\,0}}^{\,3}}=0.$$

Το $\frac{1}{5}\in f'([2,+\infty))$ οπότε η εξίσωση $f'(x)=\frac{1}{52}$ έχει λύση στο $[2,+\infty)$, η οποία είναι μοναδική αφού η f' είναι γνησίως φθίνουσα σ' αυτό το διάστημα.

Άρα υπάρχει μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f παράλληλη στην ευθεία $y=\frac{1}{5}x+2021$.